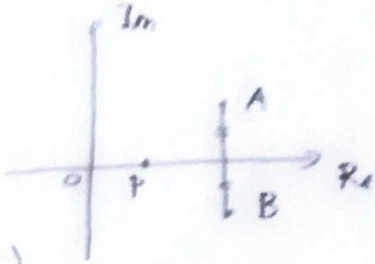
I　$(x-p)(x^2+qx+r)=0$

(1) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ のとき P, A, B は一直線上にあるので、$x^2+qx+r=0$ の判別式を D とすると、$D<0 \iff q^2-4r<0$ —— ①

このとき、AとBは実軸に関して対称である。よって ABPが三角形になる条件は①に加え α, β の実部と p が異なること。



$$\therefore\ p \neq \frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{q}{2}\quad (\because 解と係数の関係)$$

$p \neq -\frac{q}{2},\ q^2-4r<0$ //

(2) ABの長さは α, β の虚部が $\frac{\sqrt{4r-q^2}}{2}$ であるので、$\sqrt{4r-q^2}$

また、ABを底辺と見たときの高さは $\left|-\frac{q}{2}-p\right| = \left|p+\frac{1}{2}q\right|$

$\frac{1}{2}\left|p+\frac{1}{2}q\right|\sqrt{4r-q^2}$ //

(3) 対称性より、Qは実軸上にある。Qに対応する複素数（実数）を s とすると、

QA = QP なので

$$|s-\alpha| = |s-p|$$
$$\iff |s-\alpha|^2 = |s-p|^2$$
$$\iff (s-\alpha)(s-\bar{\alpha}) = (s-p)^2$$
$$\iff (s-\alpha)(s-\beta) = (s-p)^2$$
$$\iff s^2+qs+r = (s-p)^2$$
$$\iff s = \frac{p^2-r}{q+2p} \qquad \therefore\ Q : \frac{p^2-r}{q+2p}$$ //

またこれより

$$R = |p-s| = \left|\frac{p^2+qp+r}{q+2p}\right|$$ //

II.

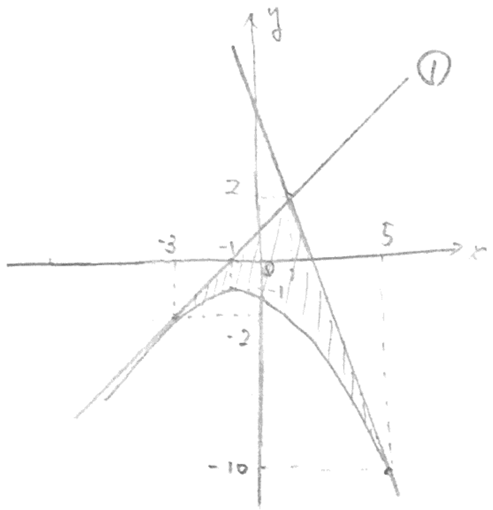
(1) $\begin{cases} y = x+1 & \cdots ① \\ y = -3x+5 & \cdots ② \\ y = -\frac{1}{4}(x+1)^2 - 1 & \cdots ③ \end{cases}$

①②の共有点は、$(x, y) = (1, 2)$

①③は、$(x, y) = (-3, -2)$で接する

②③は、$(x, y) = (5, -10)$で接する

よって、求める面積は下図斜線部の面積



よって

$$S = \int_{-3}^{1} \{(x+1) - (-\frac{1}{4}(x+1)^2 - 1)\} dx + \int_{1}^{3} \{(-3x+5) - (-\frac{1}{4}(x+1)^2 - 1)\} dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-3}^{1} x^2+6x+9 \, dx + \int_{1}^{5} x^2-10x+25 \, dx\right)$$

$$= \underline{\frac{32}{3}}$$

(2) 上図を用いて、領域内(境界含まず)にある格子点は、

$(x, y) = (0, -1)$、$(0, 0)$、$(1, -1)$
$(1, 0)$、$(1, 1)$、$(2, -3)$
$(2, -2)$

の $\underline{7個}$

III.

pを素数、a, b, cを整数とする。

(1) $\sqrt[3]{p}$が有理数であると仮定する。このとき、互いに素な整数m, nを用いて、

$\sqrt[3]{p} = \dfrac{m}{n}$とかける。両辺3乗して、

$p = \dfrac{m^3}{n^3}$

ここで、mとnが互いに素でpは整数より、$n^3 = 1$が必要。$n^3 = 1$のとき、$p = m^3$でpが素数であることに矛盾。よって、背理法より、$\sqrt[3]{p}$が無理数であることが示された。■

(2) $a(\sqrt[3]{p})^2 + b\sqrt[3]{p} + c = 0$ …①

両辺$\sqrt[3]{p}$倍して、

$ap + b(\sqrt[3]{p})^2 + c\sqrt[3]{p} = 0$ …② ■

(3) (2)を用いて、①×b − ②×aより、

$bc - a^2p + (b^2 - ac)\sqrt[3]{p} = 0$ …③ ■

(4) (3)を用いて、③の式について、

$bc - a^2p$、$b^2 - ac$は整数で、(1)より、

$\sqrt[3]{p}$は無理数なので、

$$\begin{cases} bc - a^2p = 0 \\ b^2 - ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = a^2p & \cdots ④ \\ b^2 = ac & \cdots ⑤ \end{cases}$$

(i) $a = 0$のとき

⑤より、$b = 0$。よって①から$c = 0$。

(ii) $a \neq 0$のとき

⑤より、$c = \dfrac{b^2}{a}$ ④に代入して、

$b^3 = a^3p$ ∴ $p = \dfrac{b^3}{a^3}$となり無理数であることに矛盾

以上(i)(ii)より、

$a = b = c = 0$ ■

IV

(1) $f(x) = e^x(\cos x + \sin x)$

$f'(x) = e^x(-\sin x + \cos x)$

$\quad + e^x(\cos x + \sin x)$

$= \underline{2e^x \cos x}$ //

(2) $g(x) = e^{-\pi x}\sin \pi x$

(i) $g'(x) = -\pi e^{-\pi x}\sin \pi x$

$\quad + \pi e^{-\pi x}\cos \pi x$

$= \pi e^{-\pi x}(\cos \pi x - \sin \pi x)$

$= -\sqrt{2}\pi e^{-\pi x}\sin \pi\left(x - \frac{1}{4}\right)$

よって、$g'(x) = 0$ となるのは、

$\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = n\pi$

$\therefore \quad x = n + \frac{1}{4} \quad (n \in \mathbb{Z})$

$g''(x) = \sqrt{2}\pi^2 e^{-\pi x}\sin \pi\left(x - \frac{1}{4}\right)$

$\quad - \sqrt{2}\pi^2 e^{-\pi x}\cos \pi\left(x - \frac{1}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\pi^2 e^{-\pi x}\left(\sin \pi\left(x - \frac{1}{4}\right) - \cos \pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right)$

$= 2\pi^2 e^{-\pi x}\sin \pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$= 2\pi^2 e^{-\pi x}\sin \pi\left(n - \frac{1}{4}\right)$

よって、$\begin{cases} n \text{が偶数のとき、} g''(x) < 0 \\ n \text{が奇数のとき } g''(x) > 0 \end{cases}$

以上より、整数 k を用いて、

$\begin{cases} x = 2k + \frac{1}{4} \text{ のとき、極大値 } \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(2k + \frac{1}{4}\right)\pi} \\ x = 2k + \frac{5}{4} \text{ のとき 極小値 } -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(2k + \frac{5}{4}\right)\pi} \end{cases}$ //

(ii) (i) を考慮して、

$V_n = \pi \int_{n-1}^{n} \{g(x)\}^2\,dx$

$= \pi \int_{n-1}^{n} e^{-2\pi x}\sin^2 \pi x\,dx$

$= \frac{\pi}{2}\int_{n-1}^{n} e^{-2\pi x}(1 - \cos 2\pi x)\,dx$

$= \frac{\pi}{2}\left(\int_{n-1}^{n} e^{-2\pi x}dx - \int_{n-1}^{n} e^{-2\pi x}\cos 2\pi x\,dx\right)$

$= \frac{\pi}{2}\Bigg(\left[-\frac{1}{2\pi}e^{-2\pi x}\right]_{n-1}^{n}$

$\quad - \left[-\frac{1}{4\pi}e^{-2\pi x}\left(\cos(-2\pi x) + \sin(-2\pi x)\right)\right]_{n-1}^{n}\Bigg)$

$= \underline{\frac{1}{8}\left(e^{-2(n-1)\pi} - e^{-2n\pi}\right)}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} V_k$

$\sum_{k=1}^{n} V_k = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-2(k-1)\pi} - e^{-2k\pi}\right)$

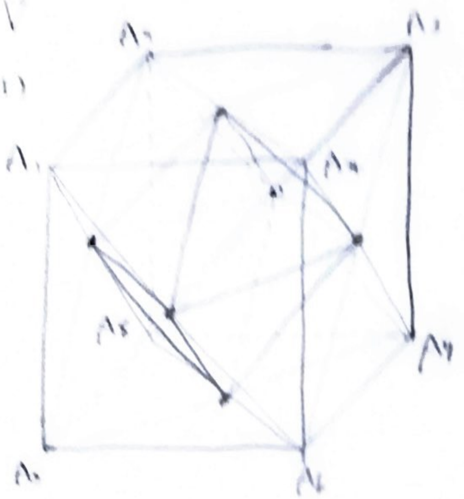
$= \frac{1}{8}\left(1 - e^{-2n\pi}\right)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(1 - e^{-2n\pi}\right)$

$= \underline{\frac{1}{8}}$ //

1

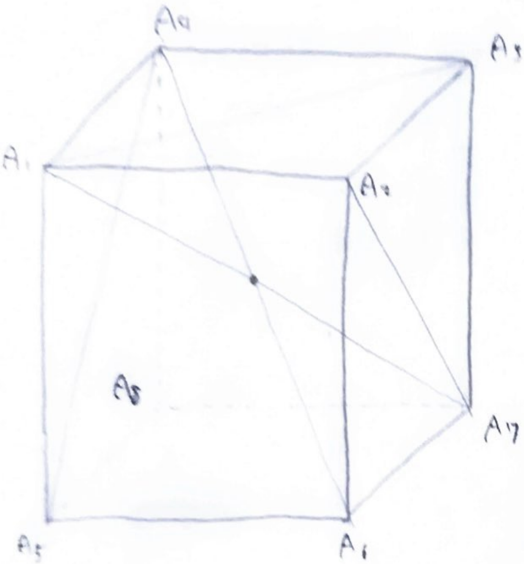
(1)



Zは右図のとおり。

正八面体。

(2)



Zは右図の黒点のみ。即ち

正六面体の中心。

(3). Xの選び方は $_8C_4 = 70$ 通り。(Xを決めればYは一意に定まる。)

・Zが正八面体になるとき、Xの選び方は 2通り

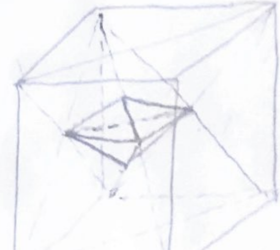
・Zが点になるとき、Xの選び方は $6 \times 4 = 24$ 通り

(底面の選び方に注目した。)

・Zが線分となるのは Xが $A_1A_3A_5A_7$ となるようなときで 6通り

・Zがないのは、Xが $A_1A_5A_6A_8$ となるようなとき(8通り)と、$A_1A_2A_5A_6$ となるようなとき(6通り)で 14通り。

・Zが右図のように六面体となるのは Xの底面の選び方に注目すると、$6 \times 4 = 24$ 通り。



以上を全て足すと、70通りになる。ゆえに求める確率は

$$p_0 = \frac{24}{70} = \frac{12}{35},\ p_1 = \frac{6}{70} = \frac{3}{35},\ p_2 = 0,\ p_3 = \frac{2+24}{70} = \frac{13}{35}$$

$$p = \frac{14}{70} = \frac{1}{5}$$

//