二.

(1) 出た目の差が2となる組み合わせは、

(1、3)、(2、4)、(3、5)、(4、6)

よって、求める確率は、

$$\frac{2\times4}{6^2}=\underline{\frac{2}{9}}$$

(2) 余事象を考える。

差の絶対値が1となる確率は、

(1、2)、(2、3)、(3、4)、(4、5)、(5、6)より、

$$\frac{2\times5}{6^2}=\frac{5}{18}$$

よって、求める確率は、

$$1-\left(1-\frac{5}{18}-\frac{2}{9}\right)^2$$

$$=\underline{\frac{3}{4}}$$

(3) 出た目の差の絶対値が
- 0、3〜5となる事象をAとする
- 1となる事象をBとする
- 2となる事象をCとする

(1)(2)より、$P_B=\frac{5}{18}$　$P_C=\frac{2}{9}$　$P_A=\frac{1}{2}$

操作が3回で終わるのは、以下の6通り。

- A→B→C　　・B→B→C
- A→C→B　　・C→C→B
- B→A→C
- C→A→B

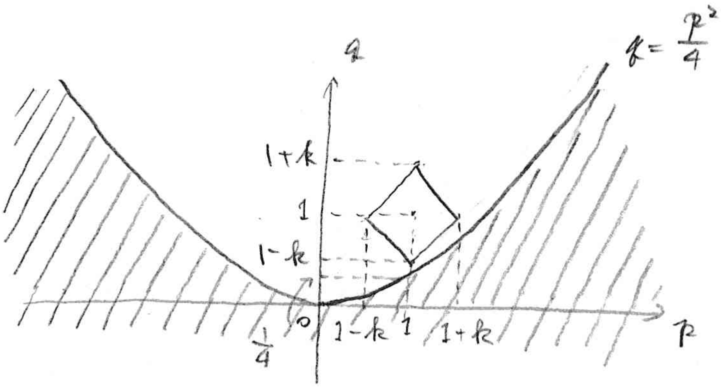
これらは互いに排反なので、求める確率は、

$$4\times\frac{5}{18}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{18}\right)^2\cdot\frac{2}{9}+\left(\frac{2}{9}\right)^2\cdot\frac{5}{18}$$

$$=\underline{\frac{25}{162}}$$

IV

(1) $q \leqq \dfrac{p^2}{4}$ — ①



$|p-1|+|q-1| = k$ とおくと. $(k \geqq 0)$

$|q-1| = k - |p-1|$

$= \begin{cases} k-p+1 & (p \geqq 1) \\ k+p-1 & (p<1) \end{cases}$

$\therefore\ q = \begin{cases} k-p+2 & (p \geqq 1, q \geqq 1) \\ -k+p & (p \geqq 1, q<1) \\ k+p & (p<1, q \geqq 1) \\ -k-p-2 & (p<1, q<1) \end{cases}$ — ②

①, ② を図示すると上図のとおり。

①をみたすので, k を 0 から大きくしていくとき初めて斜線部に共有点をもつときを考える。図より $(1, 1-k)$ が共有点となるとき, $q=\frac{p^2}{4}$ 上の点 $(1, \frac{1}{4})$ に注目して

$1-k = \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$

$(1+k, 1)$ が共有点となるとき, $q=\frac{p^2}{4}$ 上の点 $(2, 1)$ に注目して.

$1+k = 2 \Leftrightarrow k = 1$.

以上より, $\frac{3}{4}$ $(p=1, q=\frac{1}{4})$ //

(2) $p = 2x+y$, $q = 2xy$ とすると, $2x$, y は 2次方程式 $z^2 - pz + q = 0$ の2解なので, $x, y \in \mathbb{R}$ という条件は判別式を用いて

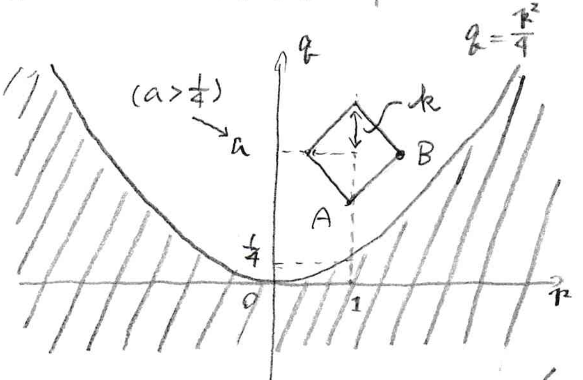
$D \geqq 0 \Leftrightarrow p^2 \geqq 4q$ — ③

で処理できる。このとき ③ ($\Leftrightarrow$ ①) のもと, $|p-1|+|q-a|$ の最小値を考えればよい。これは ② を q 方向に $+a-1$ 平行移動したものであることをふまえると,

$k = |p-1|+|q-a|$ として, 右図を得る。

(1)と同様に, k を 0 から大きくしていったときの

A か B が $p=\frac{q^2}{4}$ 上に乗る瞬間を考える。



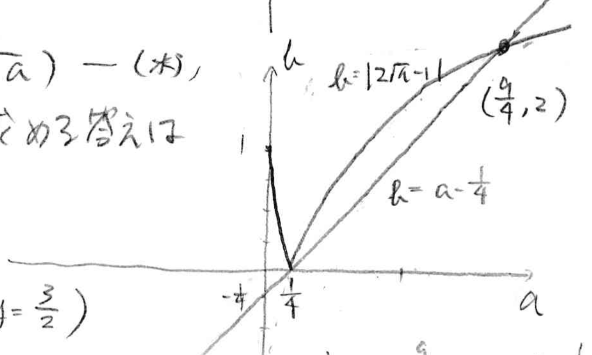
A が $p=\frac{q^2}{4}$ 上にあるとき.

$A(1, \frac{1}{4})$, $m = a - \frac{1}{4}$ $(2x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2})$ —(*)

B が $p=\frac{q^2}{4}$ 上にあるとき

$B(2\sqrt{a}, a)$, $m = |2\sqrt{a}-1|$ $(2x = \sqrt{a}, y = \sqrt{a})$ —(*),

$a - \frac{1}{4}$ と $|2\sqrt{a}-1|$ の大小を考えると, 右図のグラフより求める答えは



$\frac{1}{4}<a<\frac{9}{4}$ で $m=a-\frac{1}{4}$

$a>\frac{9}{4}$ で $m=|2\sqrt{a}-1|$

$\frac{1}{4} < a < \frac{9}{4}$ のとき $m = a - \frac{1}{4}$ $(x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{2})$

$a = \frac{9}{4}$ のとき $m = 2$ $(x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{2}$ 又は $x = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{2})$

$a > \frac{9}{4}$ のとき $m = 2\sqrt{a} - 1$ $(x = \frac{\sqrt{a}}{2}, y = \sqrt{a})$

(*) $2x$, y は $z^2 - pz + q = 0$ から求めた。

V　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+[\sqrt{n+1}]$

$b_1=1$，$b_{n+1}=b_n+(-1)^n[\sqrt{n+1}]$

(1)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$[\sqrt{n+1}]$	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3
a_n	1	2	3	5	7	9	11	13	16	19
b_n	1	0	1	-1	1	-1	1	-1	2	-1

$\therefore a_{10}=19,\ b_{10}=-1$

(2) $a_{n+1}-a_n=[\sqrt{n+1}]$ は

$11\leqq n\leqq 14$ のとき3。よって $a_{15}=19+3\times5=34$

$15\leqq n\leqq 23$ のとき4。よって $a_{24}=34+9\times4=70$

$24\leqq n\leqq 35$ のとき5。よって $a_{24+6}=70+5\times6=100$

$[\sqrt{n+1}]>0$ より a_n は n について単調増加なので、求めるnは 30 //

(3) (2)を参考にして $a_{15}=2$，$a_{16}=2-4=-2$，$a_{17}=-2+4=2$，…

$a_{24}=-2$，$a_{25}=-2+5=3$，$a_{26}=3-5=-2$，…

$a_{35}=3$，$a_{36}=3-6=-3$，$a_{37}=-3+6=3$，…

$a_{48}=-3$，$a_{49}=-3+7=4$，$a_{50}=4-7=-3$，…

$a_{63}=4$，$a_{64}=4-8=-4$，$a_{65}=-4+8=4$，…

$a_{80}=-4$，$a_{81}=-4+9=5$

よって求めるnは81 //

(4) a_n の階差数列は $[\sqrt{n+1}]$ なので $n\geqq2$ において

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}[\sqrt{n+1}]$$
$$=[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{n}]$$

ここで $[\sqrt{k}]=l$ をみたす k ($l, k\in\mathbb{N}$) は

$l\leqq\sqrt{k}<l+1$

$l^2\leqq k<(l+1)^2=l^2+2l+1$

より、$(l^2+2l+1-1)-l^2+1=2l+1$ 個存在する。よって、

$$a_n=\sum_{k=1}^{m-1}k\times(2k+1)+[\sqrt{m^2}]+[\sqrt{m^2+1}]+\cdots+[\sqrt{n}]$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}(m-1)m(2m-1)+\frac{1}{2}(m-1)m+m\times(n-m^2+1)$$
$$=\frac{1}{6}(6mn-2m^3-3m^2+5m)$$ //　(これは $n=1$ でも成立するので, $n=1,2,\cdots$)