1、

$$\begin{cases} l: y = x+1 \\ C: (x-4)^2 + (y-a)^2 = 16 \end{cases}$$

(1) P(4、a) の座標を $l$ の方程式に代入して、$a = 4+1 = \underline{5}$ //(1)

(2) $l$ と点P の距離を $d$ とするとき、満たすべき不等式は $d < 4$。

ここで、$d = \dfrac{|4-a+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{|a-5|}{\sqrt{2}}$

より、求める条件は、

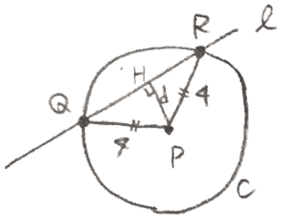
$$\frac{|a-5|}{\sqrt{2}} < 4$$

$\therefore$ $|a-5| < 4\sqrt{2}$

$\therefore$ $\underline{5-4\sqrt{2} < a < 5+4\sqrt{2}}$ //

(2)(3)(4)(5)

(3)




QRの中点をHとする

三平方の定理より、

$QH = RH = \sqrt{16-d^2}$

△PQRの面積は、$QR \times d \times \frac{1}{2}$ で、

これが 8 に等しいので

$$QR \times d = 16$$

$$d\sqrt{16-d^2} = 8$$

両辺正より、2乗しても同値性は保たれるので、$d^2(16-d^2) = 256$

$d^2 = D\ (>0)$ として、書き換えると、

$$D^2 - 16D + 64 = 0$$

$\therefore$ $D = 8$ よって、$d > 0$ より、$d = 2\sqrt{2}$

$\dfrac{|a-5|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ $\therefore$ $\underline{a = 1、9}$ // (6)、(7)

(4) $\angle QPR = \frac{5}{6}\pi$ のとき、

$$d = 4 \times \cos\frac{5}{12}\pi$$

ここで、$\cos\frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$d^2 = 16 \times \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{(a-5)^2}{2} = 16 \times \frac{4-2\sqrt{3}}{8}$$

$\therefore$ $(a-5)^2 = \underline{16 - 8\sqrt{3}}$ // (8)(9)(10)(11)

2、

それぞれの関数を $f(x)$ としたときの

$f(0)$、$f(1)$、$f(2)$、$\int_0^2 f(x)\,dx$ の値をはじめに求める

(i) $f(x)=-6x+15$ のとき（7枚）

$f(0)=15$、 $f(1)=9$、 $f(2)=3$

$\int_0^2 f(x)\,dx=18$

(ii) $f(x)=-3x^2+12$ のとき（5枚）

$f(0)=12$ $f(1)=9$ $f(2)=0$

$\int_0^2 f(x)\,dx=16$

(iii) $f(x)=6x^2-10x+11$ のとき（3枚）

$f(0)=11$ $f(1)=7$ $f(2)=15$

$\int_0^2 f(x)\,dx=18$

(iv) $f(x)=6x$ のとき（1枚）

$f(0)=0$ $f(1)=6$ $f(2)=12$

$\int_0^2 f(x)\,dx=12$

(1) $f(1)>8$ となるのは、(i)、(ii) の場合。

その確率は、 $\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$ // (12)(13)

$f(1)>8$ かつ $\int_0^2 f(x)\,dx>17$ となるのは、

(i) の場合で、その確率は $\frac{7}{16}$

よって、条件つき確率は、 $\dfrac{\frac{7}{16}}{\frac{12}{16}}=\frac{7}{12}$ // (14)(15)(16)

(2) $f_1(0)>g_1(0)$ かつ $f_1(2)>g_1(2)$ となるのは、

(i)→(ii)、(iii)→(iv) の場合。

よって、求める確率は、

$$\frac{7}{16}\times\frac{5}{15}+\frac{3}{16}\times\frac{1}{15}$$

$$=\frac{7}{48}+\frac{1}{80}$$

$$=\frac{38}{240}$$

$$=\frac{19}{120}$$ // (17)(18)(19)(20)(21)

(3) (2) と同様の場合を考えて、

$$\frac{7}{16}\times\frac{5}{16}+\frac{3}{16}\times\frac{1}{16}$$

$$=\frac{35}{256}+\frac{3}{256}$$

$$=\frac{38}{256}$$

$$=\frac{19}{128}$$ // (22)(23)(24)(25)(26)

$0\leqq x\leqq 2$ において、$f_2(x)>g_2(x)$ となる時、

$f_2(0)>g_2(0)$ かつ $f_2(1)>g_2(1)$ かつ $f_2(2)>g_2(2)$ が必要。

これをみたすのは、$\begin{cases} f_2(x)=6x^2-10x+11 \\ g_2(x)=6x \end{cases}$

$f_2(x)-g_2(x)=6x^2-16x+11$

$=6\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{1}{3}>0$

で確かに題意をみたす。

よって、求める確率は、

$$\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{16}=\frac{3}{256}$$ // (27)(28)(29)(30)

3.

$r>0$、$S_0=0$ のもと.

$$S_n=\frac{1-r^{n+1}}{(1-r)^2}-\frac{a_{n+1}}{1-r} \quad \cdots ①$$

(1) ①に $n=0$ を代入して、

$$0=\frac{1}{1-r}-\frac{a_1}{1-r}$$

$$\therefore \underline{a_1=1} \quad (31)$$

$n\geqq 2$ において、

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=\frac{r^n-r^{n+1}}{(1-r)^2}-\frac{a_{n+1}-a_n}{1-r}$$

$a_{n+1}$ について整理して、

$$\underline{a_{n+1}=ra_n+r^n} \quad (32)(33)$$

上式の両辺を $r^n(>0)$ でわると、

$$\frac{a_{n+1}}{r^n}=\frac{a_n}{r^{n-1}}+1$$

よって、$b_n=b_{n-1}+1$

$$b_1=\frac{a_1}{r^0}=1$$

よって、$\underline{初項\ 1}$ (34) $\underline{公差\ 1}$ (35)

つまり、$b_n=n$ とかける.

よって、$\underline{a_n=nr^{n-1}}$ (36)

これを①に代入して、

$$S_n=\frac{1-r^{n+1}-(1-r)(n+1)r^n}{(1-r)^2}$$

$$=\underline{\frac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}} \quad (\cdots ②)$$

(37)(38)(39)

(2) $(k+1)a_k-rka_{k-1}$

$$=k(a_k-ra_{k-1})+a_k$$

$$=kr^{k-1}+a_k=\underline{2a_k} \quad (40)$$

これを用いて、

$$(1-r)T_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_k-\sum_{k=1}^{n+1}rka_{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}2a_k-r(n+1)a_n$$

$$=\underline{2S_n-r(n+1)a_n} \quad (\cdots ③)$$

(41)(42)(43)

(3) ③に②を代入して、

$$(1-r)T_n=2\cdot\frac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}-n(n+1)r^n$$

$$\therefore T_n=\frac{1}{(1-r)^3}\{2-2(n+1)r^n+2nr^{n+1}-n(n+1)r^n(1-r)^2\}$$

$$=\underline{\frac{1}{(1-r)^3}\{2-(n+1)(n+2)r^n+2n(n+2)r^{n+1}-n(n+1)r^{n+2}\}}$$

(44) ~ (50)

よって、$\underline{q=3}$ (51)

4　$f(x) = 2^x + 2^{-x}$ ,　$g(x) = 2^x - 2^{-x}$

(1)　(与式) $\Leftrightarrow -\log_2(2^x + 2^{-x} - 2) + \log_2\left(2^{x-1} + 2^{-x+1} - \frac{3}{2}\right)$

$+ \log_2(2^{x+1} - 2) = 1$

$\Leftrightarrow \log_2 \dfrac{(2^{x+1}-2)(2^{x-1}+2^{-x+1}-\frac{3}{2})}{2^x+2^{-x}-2} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2^x-1)(2^x+2^{-x+2}-3)}{2^x+2^{-x}-2} = 1$ ,　$2^x+2^{-x}-2>0$, $2^{x-1}+2^{-x+1}-\frac{3}{2}>0$, $2^{x+1}-2>0$　―― ①

最初の式は $(2^x)^3 - 5(2^x)^2 + 2^x + 3 = 0$　( $\because$ $2^x+2^{-x}-2>0$, $2^x>0$ )

これをとくと,　$2^x = 1, 2, 3$

このうち, ①の式を全て満たすのは, $2^x = 2, 3$ のとき。 $\therefore x = 1, \log_2 3$ //

(2)　$f(1) = f(-1) = \frac{5}{2}$ , $g(1) = \frac{3}{2}$ , $g(-1) = -\frac{3}{2}$

$\therefore f(1)f(-1) + g(1)g(-1) = 4$

(3)　$f(\alpha)f(\beta) = (2^\alpha + 2^{-\alpha})(2^\beta + 2^{-\beta})$

$= 2^{\alpha+\beta} + 2^{-(\alpha+\beta)} + 2^{\alpha-\beta} + 2^{\beta-\alpha}$

$= f(\alpha+\beta) + f(\alpha-\beta)$　―― ②

同様に　$g(\alpha)g(\beta) = f(\alpha+\beta) - f(\alpha-\beta)$　―― ③

$f(\alpha)g(\beta) = g(\alpha+\beta) - g(\alpha-\beta)$　―― ④

$g(\alpha)g(\beta) = g(\alpha+\beta) + g(\alpha-\beta)$　―― ⑤

(②+③)÷2より　$f(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\{f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta)\}$

(④+③)÷2より　$g(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\{f(\alpha)g(\beta) + g(\alpha)f(\beta)\}$ //

5.

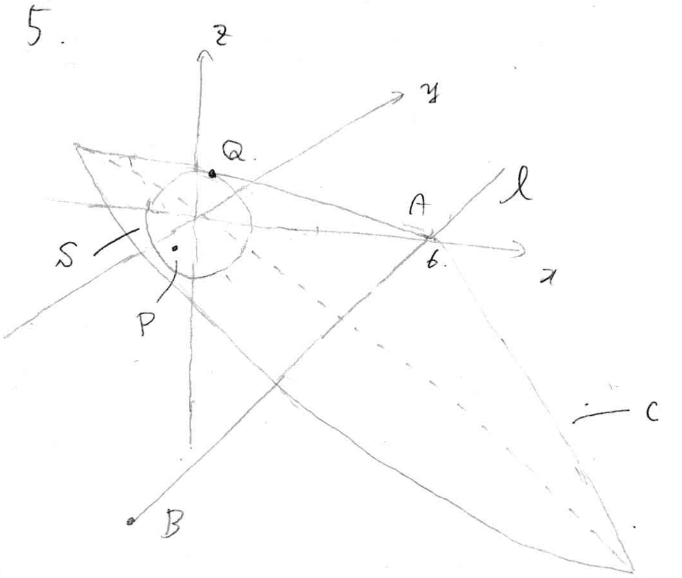



図1

$A(6,0,0)$

$B(3,-6,-6)$

$\overrightarrow{AB} = (-3,-6,-6)$

(1) $S$は原点を中心とする球面なので、原点からの距離が最小となる$l$上の点を調べる。

$l$上の点は $t \in \mathbb{R}$ として

$$(x,y,z) = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = (6-3t, -6t, -6t)$$

とおける。この点をCとすると

$$OC^2 = (6-3t)^2 + (-6t)^2 \times 2$$

$$= 81\left(t-\frac{2}{9}\right)^2 + 32 \geqq 32 \quad (\text{等号は} t=\tfrac{2}{9} \text{のとき成立})$$

よって、OCの最小値は $4\sqrt{2}$ より、求める最小値は $4\sqrt{2}-1$ //

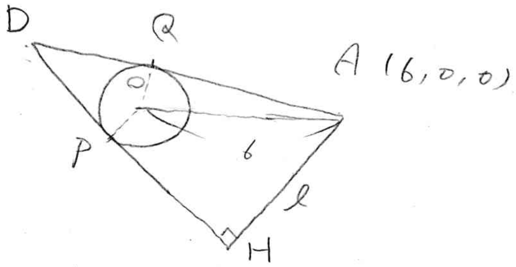
(2) $\overrightarrow{OP} \parallel l$ より、$m \in \mathbb{R}$ を用いて $P(-3m, -6m, -6m)$ とおける。

$|\overrightarrow{OP}|=1$ より、 $9m^2 + 36m^2 \times 2 = 1 \iff m = \pm\frac{1}{9}$

図1より明らかに、$m = \frac{1}{9}$ $\quad \therefore P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ //

また $Q(x,y,z)$ とおくと、

$$x^2+y^2+z^2 = 1,$$




$AQ = \sqrt{36-1}$ より、

$$(x-6)^2+y^2+z^2 = 35.$$

これらより、$x = \frac{1}{6}$。

ここで図2において 3点 $A(6,0,0)$, $P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ 図2, $O(0,0,0)$

において $y=z$ が成立していることから、Qにおいても $y=z$ で、$y=z=\pm\frac{\sqrt{70}}{12}$

PとQは x軸に対して反対に位置するので、$y=z>0$

$$\therefore Q\left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{70}}{12}, \frac{\sqrt{70}}{12}\right) //$$

(3) 図2において, D, H を定める。

C の底面を含む平面の方程式は $3\vec{OP}=(-1,-2,-2)$ を法線としてもつから,

$$-x-2y-2z+p=0$$

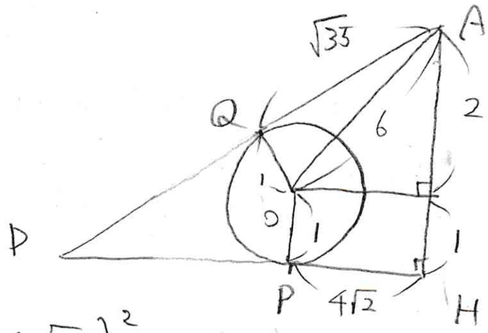
と表せる。$P\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ を通るので, $p=-3$

よって $x+2y+2z+3=0$ — ① が C の底面を含む平面の方程式となる。

点と平面の距離の公式から, ① と $A(6,0,0)$ の距離は

$$AH=\frac{|6+2\cdot0+2\cdot0+3|}{\sqrt{1+4+4}}=3$$

ゆえに各線分の長さは右図のとおり




$DQ=DP=d$ とおくと

$$(d+\sqrt{35})^2=(d+4\sqrt{2})^2+3^2$$

$$\iff d=\sqrt{35}+4\sqrt{2}$$

$$\therefore\ V=\frac{1}{3}\cdot3\cdot\pi\left(\sqrt{35}+4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)^2$$

$$=(163+16\sqrt{70})\pi$$ //

6. (1) $f(x)$ は $x(x-1)$ で割り切れるので、2次以上である。

$f(x)$ が 2次式なら

$$f(x) = ax(x-1)$$

とおける。このとき、

$P(x) = a(x-1)$ より、$P(0) = -a$.

$Q(x) = ax$ より $Q(1) = a$

$-a = -4$, $a = 2$ をみたす $a \in \mathbb{R}$ は存在せず、不適

$f(x)$ が 3次式なら、

$$f(x) = (ax+b)x(x-1)$$

とおける。このとき、

$P(x) = (ax+b)(x-1)$ より $P(0) = -b$

$Q(x) = (ax+b)x$ より $Q(1) = a+b$.

$-b = -4$, $a+b = 2$ を解くと、$a = -2$, $b = 4$ と確かに存在するので、

$f(x)$ は 3次式で

$$f(x) = (-2x+4)x(x-1)$$
$$= -2x^3+6x^2-4x \quad //$$

(2) $f'(x) = -6x^2+12x-4$ より $(r, f(r))$ の接線は

$$y = (-6r^2+12r-4)(x-r) - 2r^3+6r^2-4r$$
$$y = (-6r^2+12r-4)x + 4r^3-6r^2 \quad \text{―― ①}$$

よって傾きは $-6r^2+12r-4$, $y$ 切片は $4r^3-6r^2$ //

(3) ① が $(s, t)$ を通るとき

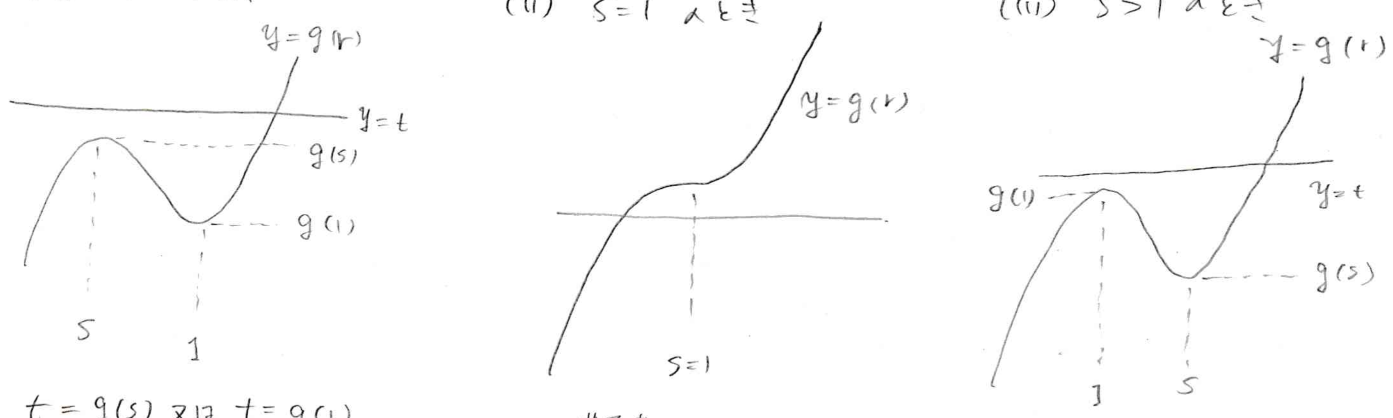
$$t = (-6r^2+12r-4)s + 4r^3-6r^2$$

が成立する。これが、$r$ についてちょうど 2実数解をもてばよい。

右辺を $g(r)$ とすると、$y=t$ と $y=g(r)$ が 2共有点をもてばよいので、

$$g'(r) = 12r^2-12r + (-12r+12)s$$
$$= 12(r-1)(r-s)$$

(i) $s<1$ のとき、　(ii) $s=1$ のとき　(iii) $s>1$ のとき




$t=g(s)$ 又は $t=g(1)$.　　2共有点をもちえない。　　$t=g(1)$ 又は $t=g(s)$

よって、求める条件は $s \neq 1$, 「$t = -2s^3+6s^2-4s$ 又は $t = 2s-2$」.